Аритметички и геометријски низ

(Додатна настава у Математичкој гимназији, 2004.)
предавач: Владимир Балтић

Теоретски увод

Аритметички низ

Низ
$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ldots,a_1+n\cdot d,\ldots$$
назива се аритметички низ (или аритметичка прогресија). Најважнија особина аритметичког низа је да се свака два узастопна члана разликују за d, тј. важи
$$a_n = a_{n-1}+d.$$
Сваки члан низа се може изразити помоћу првог члана a_1 и разлике низа d, тј. имамо формулу за општи члан низа:
$$a_n = a_1+(n-1)\cdot d.$$
Сума (збир) првих n чланова аритметичког низа, $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ једнака је
$$S_n = n\cdot a_1+\frac{(n-1)n}{2}\cdot d = \frac{n}{2}(a_1+a_n).$$
У задацима се понекад користи да за три узастопна члана аритметичког низа важи
$$2a_n = a_{n-1}+a_{n+1}.$$

Геометријски низ

Низ
$$a_1,\ a_1\cdot q,\ a_1\cdot q^2,\ldots,a_1\cdot q^n,\ldots$$
назива се геометријски низ (или геометријска прогресија). Најважнија особина геометријског низа је да је количник свака два узастопна члана једнак q, тј. важи
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q,\quad \text{односно}\quad a_n = a_{n-1}\cdot q.$$
Сваки члан низа се може изразити помоћу првог члана a_1 и количника низа q, тј. имамо формулу за општи члан низа:
$$a_n = a_1\cdot q^{n-1}.$$
Сума (збир) првих n чланова геометријског низа, $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$ једнака је
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1},\quad q\neq 1$$
(за $q=1$ сума низа је једнака $S_n = n\cdot a_1$). У задацима се понекад користи да за три узастопна члана геометријског низа важи
$$a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1}$$
(уз услов да су сва три члана $\neq 0$).

Задаци

1. Бројеви 3, x_1, x_2, x_3, x_4, 13 су узастопни чланови аритметичког низа. Одредити непознате бројеве x_1, x_2, x_3, x_4.

2. Између -2 и 46 уметнути 15 бројева, тако да сви заједно чине аритметички низ. Колики је збир ових 17 бројева?

3. Израчунати општи члан a_n и разлику d аритметичког низа коме је први члан $a_1 = -45$, а збир првих 31 чланова $S_{31} = 0$.

4. Аритметички низ је дат са $a_1 = 14.5$ и $d = 0.7$. Који члан низа $(n = ?)$ је једнак $a_n = 32$? За тако одређено n израчунати суму првих n чланова низа S_n.

5. Аритметички низ је дат са $a_1 = 41$ и $d = 2$. Колико $(n = ?)$ треба сабрати чланова овог низа да би се добила сума $S_n = 4784$? За тако одређено n колики је n–ти члан низа a_n?

6. За аритметчки низ са општим чланом a_n важи $a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0$ и $a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$. Израчунати први члан и разлику тог низа.

7. У аритметичком низу је $a_2 + a_5 - a_3 = 20$ и $a_1 + a_6 = 34$. Израчунати збир првих 10 чланова низа.

8. Збир прва четири члана аритметичке прогресије је за 8 мањи од двоструког збира прва три члана те прогресије. Ако је четврти члан те прогресије 19, колики је њен пети члан?

9. Одредити збир првих 5 чланова аритметичке прогресије за коју важи: $a_m + a_n = a_{m+n}$ и $a_3 = 24$.

10. Колики је збир свих троцифрених бројева дељивих са **а)** 11; **б)** 7?

11. У једном аритметичком низу први члан је 11 и седми 35. Његов четврти члан је једнак четвртом члану другог аритметичког низа. Први и последњи члан овог другог низа су 38 и 13. Колико чланова има други низ?

12. Неки чланови аритметичких прогресија 17, 21, 25, ... и 16, 21, 26, ... су једнаки. Наћи збир првих 100 једнаких чланова ових прогресија.

13. Решити једначину: $3 + 10 + 17 + \ldots + x = 345$.

14. Четврти члан аритметичког низа је 7, а девети члан је 17. Колико чланова овог низа треба сабрати да се добије 256?

15. Збир прва четири члана аритметичке прогресије је 92, а збир првих девет чланова је 342. Колико првих чланова треба сабрати да би се добио збир 840?

16. Збир прва три члана растућег аритметичког низа је 30, а збир њихових квадрата је 692. Одредити збир првих 15 чланова овог низа.

17. Наћи аритметичку прогресију код које збир првих n чланова износи $3n^2 + 4n$, за сваки n.

18. Бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ чине аритметичку преогресију. Збир чланова са непарним индексом ове прогресије је за 15 већи од збира чланова са парним индексом. Ако је $a_{20} = 3 \cdot a_9$, колики је збир цифара средњег чланаове прогресије?

19. Између 3 и 768 уметнути три броја, тако да свих пет бројева чине геометријску прогресију.

20. Израчунати десети члан геометријског низа $1, 3, 9, 27, \ldots$

21. Израчунати количник геометријског низа ако је његов први члан $a_1 = 1$, а шести члан $a_6 = 1024$.

22. Одредити геометријску прогресију код које је $a_1 + a_3 = 15$ и $a_2 + a_4 = 30$.

23. У геометријској прогресији је $a_1 + a_5 = 51$ и $a_2 + a_6 = 102$. За које n је збир првих n чланова прогресије једнак 3069?

24. Геометријска прогресија има паран број чланова. Збир чланова на непарним местима износи 85, а збир чланова на парним местима износи 170. Одредити количник прогресије.

25. Збир три броја који образују растућу геометријску прогресију је 252. Ако је 48 средњи члан прогресије, колики је најмањи члан?

26. Која четири броја образују геометријску прогресију, ако је збир крајњих чланова 27, а збир средњих чланова 18?

27. Одредити растући геометријски низ код кога је $a_1 + a_7 = 65$ и $a_3 \cdot a_5 = 64$.

28. Бројеви a_1, a_2 и a_3 су три узастопна члана геометријске прогресије са количником $q = 2$, а a_2, a_3 и a_4 су три узастопна члана аритметичке прогресије са разликом $d = 6$. Израчунати збир $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

29. Наћи четири броја од којих прва три чине геометријски, а последња три аритметички низ, ако је збир крајњих чланова једнак 35, а средњих 30.

30. У аритметичком низу први, пети и једанаести члан образују геометријски низ. Ако је у овом аритметичком низу само први члан једнак 24, колики је десети члан?

31. Три броја чији је збир 52 образују геометријски низ. Ако се тим бројевима дода, редом, 2, 12, 6 добијају се три броја који образују аритметички низ. Наћи те бројеве.

32. Збир прва три члана геометријског низа је 91. Ако тим члановима додамо редом 25, 27, 1 добићемо три броја који чине аритметички низ. Одредити седми члан датог геометријског низа.

33. Ако се редом сваком од четири прва члана једног аритметичког низа дода 5, 6, 9 и 15, добија се геометријски низ. Наћи тај геометријски низ.

34. Три дата броја су прва три члана геометријског низа. Ако се другом броју дода x, низ прелази у аритметички. Ако се потом трећем броју дода y, поново добијамо геометријски низ. Који су ти бројеви? **а)** $x = 12$, $y = 96$; **б)** $x = 8$, $y = 64$.

35. Збир трећег и седмог члана аритметичке прогресије је 46, а однос (размера) другог и шестог члана је $2 : 7$. Колико чланова прогресије даје збир 1575?

36. Четири броја чине геометријски низ. Збир првог и четвртог члана односи се према збиру другог и трећег члана као $3 : 2$ и други број је за 72 мањи од четвртог. Који су то бројеви?

37. Дата је функција $f(x) = x^2 - 3x + 2$. **а)** Доказати да бројеви $f(x+1) - f(x)$, $f(x+2) - f(x+1)$, $f(x+3) - f(x+2)$, $\ldots$ чине аритметичку прогресију. **б)** Коју вредност треба дати промењљивој x да би збир пет првих чланова те прогресије био 60? **в)** За тако одређено x колико чланова најмање треба сабрати да би збир био већи од 120?

38. Одредити природан број n ако се зна да је збир $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ троцифрени број чије су све цифре једнаке.

39. Цифре датог троцифреног броја образују аритметичку прогресију. Ако тај број поделимо збиром његових цифара добићемо 26, а ако том броју додамо 198, добићемо број написан истим цифрама, али у обрнутом поретку. Који је дати троцифрен број?

40. Колики је збир n бројева низа: 1, 11, 111, $\ldots$?

41. Решити једначину $5^{2+4+6+\ldots+2n} = 0.04^{-21}$, $n \in \mathbb{N}$.

42. За које вредности x бројеви $\log 2$, $\log(2^x - 1)$ и $\log(2^x + 3)$ представљају у датом поретку три узастопна члана аритметичког низа?

43. Уколико бројеви $\log_2(3^x - 1)$, $\log_4(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x)$ и $\log_2(3 - 3^x)$ чине узастопне чланове аритметичке прогресије, наћи x.

44. Одредити геометријску прогресију од три члана, код које збир чланова износи 14, а збир логаритама тих чланова за основу 2 износи 6.

45. Обим многоугла је 316. Његове странице образују аритметички низ са разликом 6. Највећа страница је 88. Колико страница има многоугао?

46. Један угао троугла је $120°$, а његове странице образују аритметичку прогресију са разликом 4. Наћи странице троугла и његову површину.

47. Доказати да три различита броја не могу бити истовремено три узастопна члана једне аритметичке и једне геометријске прогресије.

48. Наћи све аритметичке низове код којих је збир првих n чланова једнак n^2.

49. Дати су реални бројеви a, b и c. Под којим условима постоји аритметички низ, такав да је за свако n збир S_n првих n чланова тог низа једнак an^2+bn+c?

50. Ако a, b и c образују аритметичку прогресију, доказати да и бројеви $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ образују аритметичку прогресију.

51. Ако a, b и c образују аритметичку прогресију, доказати да и бројеви a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 образују аритметичку прогресију.

52. Ако a^2, b^2 и c^2 образују аритметичку прогресију, доказати да позитивни бројеви $\dfrac{1}{b+c}$, $\dfrac{1}{a+c}$ и $\dfrac{1}{a+b}$ такође образују аритметичку прогресију.

53. Нека је $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ аритметички низ. Доказати да важи:

$$a_1{}^3 + a_2{}^3 + \ldots + a_n{}^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d},$$

где је d разлика низа.

54. Ако су бројеви a_1, a_2, $\ldots$, a_n различити од нуле и ако образују аритметичку прогресију, доказати једнакост:

$$S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.1 \tag{1}$$

Обрнуто, ако бројеви a_1, a_2, $\ldots$, a_n $(n \geqslant 3)$ испуњавају услов (1) за свако $n \geqslant 3$, доказати да они образују аритметичку прогресију.

55. Доказати да за сваку аритметичку прогресију a_1, a_2, $\ldots$, a_n важи:

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

56. Дат је аритметички низ a_1, a_2, $\ldots$, a_n. Доказати да је

$$S = \frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1+a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

57. Дата су два аритметичка низа a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Познато је да је $a_1+a_2+a_3 = b_1+b_2+b_3$ и да бројеви a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 чине геометријски низ. Доказати да је $a_1 = b_3$, $a_2 = b_2$ и $a_3 = b_1$.

58. Ако су бројеви a, b и c истовремено пети, седамнаести и тридесеседми члан једне аритметичке и једне геометријске прогресије, доказати да је: $a^{b-c} \cdot b^{c-1} \cdot c^{a-b} = 1$.

59. Доказати да за сваки аритметички низ важи једнакост: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

60. Наћи све аритметичке прогресије са разликом $d = 2$ код којих односи $S_{5n} : S_n$ збира првих $5n$ и збира првих n не зависе од n.

61. Доказати да за сваки геометријски низ важи једнакост: $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

62. Ако је n–ти члан аритметичке прогресије $a_n = m$, а m–ти $(m > n)$ члан $a_m = n$, одредити a_{m-n}.

63. Дати су чланови аритметичке прогресије $a_{m+n} = A$ и $a_{m-n} = B$. Наћи a_m и a_n.

64. Нека је S_n збир првих n чланова аритметичког низа. Ако за неке m и n, где је $m \neq n$, важи $S_m = S_n$, доказати да је $S_{m+n} = 0$.

65. Ако за неке m и n, $m \neq n$, важи за суме првих чланова неког аритметичког низа $\dfrac{S_m}{S_n} = \dfrac{m^2}{n^2}$, доказати да је $\dfrac{a_m}{a_n} = \dfrac{2m-1}{2n-1}$.

66. Збир првих n чланова неког геометријског низа је S, а збир њихових реципрочних вредности је T. Израчунати производ P тих n чланова у функцији S, T и n.

67. Нека је $s = 1 + q + q^2 + \ldots$ и $S = 1 + Q + Q^2 + \ldots$, где је $|q| < 1$ и $|Q| < 1$. Израчунати у функцији од s и S збир $1 + qQ + q^2Q^2 + \ldots$.

68. Нека је S_1 збир првих n_1 чланова аритметичке прогресије, S_2 збир првих n_2 чланова исте прогресије, S_3 збир првих n_3 чланова исте прогресије. Доказати једнакост: $\dfrac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \dfrac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \dfrac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$. Генералисати!

69. Куп такмичење одвија се по следећим правилима: Сваки меч, у коме се састају две екипе, даје победника. Победници настављају такмичење, док поражени више не играју. У следећем колу састају се победници, итд. све до финалног меча у коме играју две екипе. Победник у овом мечу осваја куп. Јасно је да победник Купа није ниједном поражен.
За куп такмичење пријављено је 16000 екипа. Колико мечева треба да се одигра да би се добио освајач купа? Рачунајте напамет!

70. Доказати да бројеви $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могу бити чланови једне **а)** аритметичке прогресије; **б)** геометријске прогресије.

71. Могу ли $\sqrt{5}$ и 5 бити чланови аритметичког низа чији је први члан једнак 2?

72. Дата су два аритметичка низа чије су разлике једнаке $\sqrt{13}$ и 13. Доказати да постоји највише један заједнички члан за оба низа.

73. Дата је шема бројева

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\vdots
\end{array}$$

Доказати да је збир бројева у свакој врсти једнак квадрату непарног броја.

74. Природни бројеви разврстани су на следећи начин:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & 3 & 4 & & \\
 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}$$

Доказати да је $n^3 + (n-1)^3$ збир бројева у n–тој врсти.

75. Дато је p аритметичких прогресија:

први члан	1	1	1	$\ldots$	1
разлика	1	2	3	$\ldots$	p

Доказати да је збир n–тих чланова ових прогресија $\dfrac{1}{2}\big((n-1)p^2 + (n+1)p\big)$.

76. Дато је p аритметичких прогресија:

први члан	1	1	1	$\ldots$	1
разлика	1	3	5	$\ldots$	$2p-1$
збир n првих чланова	s_1	s_2	s_3	$\ldots$	s_p

Доказати формулу $\sum_{k=1}^{p} s_k = \frac{1}{2}np(np+1)$.

77. Збир k $(k \leqslant 1)$ узастопних природних бројева је једнак 66. Колики је број различитих вредности k, за које задатак има решења?

78. Показати да за сваки природан број n важи: $2+4+6+\ldots+2n = n^2+n$.

79. Одредити бројеве A, B и C тако да за сваки природан број n важи једнакост:
$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n} = \frac{An+b}{2^n}+C$.

80. Дате су две аритметичке прогресије: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 29, 33, 37,... и 4, 15, 26, 37, 48, 59,... Одредити све чланове прве и друге прогресије који су међусобно једнаки.

81. Дат је низ $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 11, a_5 = 18, \ldots$, такав да разлике његових узастопних чланова чине аритметички низ. Израчунати a_{2001}.

82. Наћи збир n разломака: $\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\ldots$, ако бројиоци разломака чине аритметичку, а имениоци геометријску прогресију.

83. Решити систем једначина $2x^2 = y^2+z^2$, $xyz = 64$, знајући да $\log_y x$, $\log_z y$ и $\log_x z$ образују геометријску прогресију.

84. Бесконачна опадајућа геометријска прогресија има члан једнак $\frac{1}{2}$. Збир свих чланова који се налазе испред овог члана је 60, а збир свих чланова који се налазе иза овог члана је $\frac{1}{4}$. Који је по реду тај члан у прогресији (тј. ако је $a_n = \frac{1}{2}$ наћи n).

85. Две бесконачне опадајуће геометријске прогресије имају особину да је први члан прве прогресије једнак количнику друге прогресије и количник прве прогресије једнак је првом члану друге прогресије. Однос збира прве прогресије према збиру квадрата свих њених чланова је 8/3. Такав исти однос код друге прогресије је 9/2. Наћи збир сваке од тих прогресија.

86. Наћи x тако да бројеви $\log_2(3^x-1)$, $\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)$ и $\log_2(3-3^x)$ чине аритметичку прогресију.

87. Ако за низ $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ ненегативних реалних бројева постоји реалан број Δ такав да за сваки природан број важи:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}}{\Delta},$$

доказати да је тај низ аритметички.

88. Задати су позитивни бројеви $x_1, x_2, \ldots x_n$, који чине аритметичку прогресију са разликом d. Доказати да је:

$$S = \frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{d}{x_1x_2}+\frac{d}{x_1x_3}+\ldots+\frac{d}{x_{n-1}x_n}+\frac{d^2}{x_1x_2x_3}+\ldots+\frac{d^2}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}+\ldots+\frac{d^{n-1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{n}{x_1},$$

где су узети сви могући производи елемената $x_1, x_2, \ldots x_n$.

89. Ако корени једначине $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \neq 0$, образују геометријску прогресију, доказати да је $ac^3 = db^3$.

90. Дата је једначина $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Ако решења ове једначине образују геометријску прогресију, доказати да је тада $p^2s = r^2$, а ако образују аритметичку прогресију, доказати да је $p^3-4pq+8r=0$.

91. Унутрашњи углови код темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ образују геометријску прогресију чији је количник 2. Доказати да за странице $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ и $c = \overline{AB}$ тог троугла важи једнакост $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$.

92. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји аритметичка прогресија $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ са особинама:
1° сви бројеви a_j су сложени, 2° (a_i, a_j) за $i \neq j$ (тј. сви чланови овог низа су узајмно прости бројеви).

93. Модули комплексних бројева a, b, c и d чине геометријску прогресију, а њихови аргументи аритметичку. Ако је $a = \sqrt{2}$ и $d = 4i$, изразити те бројеве у тригонометријском облику.

94. Реални полином $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ $(c \neq 0)$ има три различита корена који су узастопни чланови неке геометријске прогресије, док су њихове реципрочне вредности узастопни чланови неке аритметичке прогресије. Одредити b и c (у функцији од a).

95. Дата је једначина $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Ако решења ове једначине образују геометријску прогресију, доказати да је тада $p^2 s = r^2$, а ако образују аритметичк прогресију, доказати да је тада $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

96. Наћи геометријску прогресију у којој су само првих 10 чланова цели бројеви.

97. Доказати да аритметичка прогресија $a_k = 1000 + 1998k$ садржи бесконачно много бројева који су потпуни квадрати.

98. Дат је природан број a и аритметички низ $a, 3a, 5a, 7a\ldots$ Чланови тог низа груписани су на следећи начин: прву групу чине првих a чланова низа, другу следећих $2a$ чланова, трећу следећих $3a$ чланова, итд. Доказати да је збир елемената у свакој групи једнак кубу броја елемената те групе.

99. У свакој бесконачној аритметичкој прогресији $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ где су $a, d \in \mathbb{N}$
а) постоје два члана са једнаким збиром цифара;
б) постоји члан чије су прве две четири цифре 1991.
Доказати. (Бројеве посматрамо у декадном запису.)

100. Нека је p реалан број. Одредите решења x_1, x_2, x_3 једначине $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$, ако је познато да су она узастопни чланови аритметичког низа.

101. Доказати да за сваки аритметички низ $\{a_n\}$ важи једнакост:
$a_1 - \binom{n}{1}a_2 + \binom{n}{2}a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n + (-1)^n a_{n+1} = 0,\ n \geqslant 2.$

Решења

1. $x_0 = 3$, $x_5 = 13$, тј. имамо $x_0 = x_1 + (0-1)d = x_1 - d = 3$, $x_5 = x_1 + (5-1)d = x_1 + 4d = 13$. Решавањем овог система по x_1 и d добијамо $x_1 = 5$ и $d = 2$, што нам даје тражене бројеве: $x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 9, x_4 = 11$.

2. Ако убацимо 15 бројева добијамо низ $a_1 = -2$, a_2, ...,a_{16}, $a_{17} = 46$. Тражену суму S_{17} рачунамо по формули $S_{17} = \frac{17}{2} \cdot (a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2} \cdot (-2 + 46) = 374$. (могли смо одредити и d, што нам се не тражи, $x_{17} = x_1 + (17-1)d = -2 + 16d = 46$, одакле је $d = 2$, тј. тражени низ је: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43)

3. $S_{31} = \frac{31}{2} \cdot (a_1 + a_{31}) = 0 \;\Rightarrow\; a_{31} = -a_1 = 45 = a_1 + 30d$, одакле је $d = 3$, што нам даје општи члан низа $a_n = -45 + 3(n-1) = 3n - 48$.

4. Из формуле $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ добијамо да је $n - 1 = \frac{a_n - a_1}{d} = \frac{15.5}{0.7} = 25$, тј. $n = 26$. $S_{26} = \frac{26}{2} \cdot (14.5 + 32) = 604.5$.

5. $S_n = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$, тј. $4784 = 41n + n^2 - n$, $n^2 + 40n - 4784 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $n_1 = -92$ и $n_2 = 52$, али како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење $n_1 = -92$ отпада, тј. број чланова низа је $n = 52$. $a_{52} = a_1 + (52-1)d = 41 + 51 \cdot 2 = 143$.

6. $a_2 - a_6 + a_4 + 7 = (a_1 + d) - (a_1 + 5d) + (a_1 + 3d) + 7 = a_1 - d + 7 = 0$, $a_8 - a_7 - 2a_4 = (a_1 + 7d) - (a_1 + 6d) - 2(a_1 + 3d) = -2a_1 - 5d = 0$. Решење овог система по a_1 и d је $a_1 = -5$ и $d = 2$.

7. $a_2 + a_5 - a_3 = (a_1 + d) + (a_1 + 4d) - (a_1 + 2d) = a_1 + 3d = 20$ и $a_1 + a_6 = a_1 + (a_1 + 5d) = 2a_1 + 5d = 34$. Решење овог система по a_1 и d је $a_1 = 2$ и $d = 6$, што кад уврстимо у формулу за суму добијамо $S_{10} = 10 \cdot 2 + \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot 6 = 290$.

8. $S_4 = 2S_3 - 8$, тј. $4a_1 + 6d = 2 \cdot (3a_1 + 3d) - 8$, $2a_1 = 8$, $a_1 = 4$. $a_4 = a_1 + 3d = 19$, одакле добијамо $d = 5$. $a_5 = a_1 + 4d = 4 + 4 \cdot 5 = 24$.

9. $a_m + a_n = a_{m+n}$, тј. $a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-1)d = a_1 + (m+n-1)d$, односно $a_1 = d$. $a_3 = a_1 + 2d = 24$, што нам даје $a_1 = d = 8$. Тражена сума првих пет чланова је $S_5 = 5 \cdot 8 + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 8 = 120$.

10. а) Први троцифрен број дељив са 11 је 110, а последњи је 990. Они чине аритметички низ 110, 121, 132, ..., 990, код кога је $a_1 = 110$ и $d = 11$. Последњи члан овог низа је $a_n = 110 + (n-1) \cdot 11 = 990 \;\Rightarrow\; n - 1 = 80$, тј. $n = 81$. Тражена сума свих ових бројева је $S_{81} = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{81}{2} \cdot (110 + 990) = 44550$.
б) Аналогно имамо низ 105, 112, ..., 994, тј. $a_1 = 105$, $d = 7$. $994 = 105 + (n-1) \cdot 7$, одакле добијемо $n = 128$. Тражена сума је $S_{128} = \frac{128}{2} \cdot (105 + 994) = 70336$.

11. Означимо први аритметички низ са a_1, a_2, ..., a_7, а други са b_1, b_2, ..., b_n. За први низ знамо да је $a_1 = 11$ и $a_7 = a_1 + 6d = 35$, одакле добијамо $d = 4$, те је $a_4 = a_1 + 3d = 11 + 3 \cdot 4 = 23$. Како је $b_1 = 38$ и $23 = a_4 = b_4 = b_1 + 3\delta = 38 + 3\delta$ добијамо да је разлика другог низа, $\delta = -5$. Последњи члан овог низа је $b_n = 13 = 38 + (n-1) \cdot (-5)$, одакле је $n - 1 = 5$, тј. други низ има $n = 6$ чланова.

12. Разлика првог низа је $d_1 = 4$, а другог $d_2 = 5$. Заједнички чланови такође чине аритметички низ са првим чланом $c_1 = 21$ и разликом 20 (у општем случају је разлика $d = \text{НЗС}(d_1, d_2)$). Стога је тражена сума $S_{100} = 100 \cdot c_1 + \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot d = 101100$.

13. Једначина $3 + 10 + 17 + \ldots + x = 345$ представља суму $S_n = 345$ аритметичког низа код кога је $a_1 = 3$ и $d = 7$. $S_n = n \cdot 3 + \frac{(n-1)n}{2} \cdot 7 = 345$, што нам даје квадратну једначину $7n^2 - n - 690 = 0$, чија су решења $n_1 = -\frac{69}{7}$ и $n_2 = 10$. Како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење $n_1 = -\frac{69}{7}$ отпада, тј. број чланова низа је $n = 10$.

14. $a_4 = a_1 + 3d = 7$, $a_9 = a_1 + 8d = 17$. Решење овог система по a_1 и d је $a_1 = 1$, $d = 2$. $S_n = n \cdot 1 + \frac{(n-1)n}{2} \cdot 2 = n + n^2 - n = n^2 = 256$. Решења ове квадратне једначине су $n_1 = -16$ и $n_2 = 16$, али како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење $n_1 = -16$ отпада, тј. број чланова низа је $n = 16$.

15. $S_4 = 4a_1 + 6d = 92$, $9a_1 + 36d = 342$. Решење овог система по a_1 и d је $a_1 = 14$ и $d = 6$. $S_n = 14 \cdot n + \frac{(n-1)n}{2} \cdot 6 = 3n^2 + 11n = 840$. Решења квадратне једначине $3n^2 + 11n - 840 = 0$ су $n_1 = -\frac{56}{3}$ и $n_2 = 15$, али како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење $n_1 = -\dfrac{56}{3}$ отпада, тј. број чланова низа је $n = 15$.

16. $S_3 = a_1+a_2+a_3 = 3a_1+3d = 30$, тј. $a_1+d = 10$. ${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2 = {a_1}^2+(a_1+d)^2+(a_1+2d)^2 = 3{a_1}^2+6a_1d+5d^2 = 692$. Када у ову једначину убацимо $a_1 = 10-d$ добијамо $d^2 = 196$, чија су решења $d_1 = -14$ и $d_2 = 14$. Решење $d_1 = -14$ отпада јер је у том случају аритметички низ опадајући па је $d = 14$ (тада је низ растући). $a_1 = 10 - d = -4$ што нам даје $S_{15} = -4 \cdot 15 + \frac{14 \cdot 15}{2} \cdot 14 = 1410$.

17. $S_n = n \cdot a_1 + \dfrac{(n-1)n}{2} \cdot d = \dfrac{d}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \dfrac{d}{2})n = 3n^2 + 4n$. Како ова једнакост важи за свако $n \in \mathbb{N}$ мора да буде $\dfrac{d}{2} = 3$ и $a_1 - \dfrac{d}{2} = 4$, што нам даје $d = 6$ и $a_1 = 7$, односно $a_n = 7 + (n-1) \cdot 6 = 1 + 6n$.

18. $a_1, a_3, \ldots, a_{21}$ и $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}$ су такође аритметички низови, али са разликом $2d$. Стога $a_1+a_3+\ldots+a_{21} = 15 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{20}$ постаје $11 \cdot a_1 + \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot 2d = 15 + 10 \cdot (a_1 + d) + \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot 2d$ (ставили смо $a_2 = a_1 + d$), што кад се среди даје $a_1 + 10d = 15$. Други услов $a_20 = a_1 + 19d = 3 \cdot a_9 = 3 \cdot (a_1 + 8d)$ се своди на $2a_1 + 5d = 0$. Решење овог система по a_1 и d је $a_1 = -5$ и $d = 2$. Тражени средњи члан је $a_{11} = a_1 + 10d = -5 + 10 \cdot 2 = 15$, па је његов збир цифара 6.

19. Тај геометријски низ је $a_1 = 3$, a_2, a_3, a_4 и $a_5 = 768 = a_1 \cdot q^{5-1}$. Одатле добијамо $q^4 = 256$. Ова једначина има два решења $q_1 = 4$ и $q_2 = -4$, што нам даје два решења задатка: 3, 12, 48, 192, 768 и 3, -12, 48, -192, 768.

20. Код овог геометријског низа је $a_1 = 1$ и $q = 3$. Стога је $a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 3^9 = 19683$.

21. $a_6 = a_1 \cdot q^5 \;\Rightarrow\; q^5 = 1024$. Одатле је $q = \sqrt[5]{1024} = 4$.

22. $a_1 + a_3 = a_1 + a_1q^2 = 15$, $a_2 + a_4 = a_1q + a_1q^3 = q(a_1 + a_1q^2) = q \cdot 15 = 30$, тј. $q = 2$, што кад заменимо у прву једначину добијамо $a_1 + 4a_1 = 15$, односно $a_1 = 3$. Општи члан је дат са $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

23. $a_1 + a_5 = a_1 + a_1q^4 = 51$, $a_2 + a_6 = a_1q + a_1q^5 = q(a_1q + a_1q^4) = q \cdot 51 = 102$. Одатле је $q = 2$, што кад заменимо у прву једначину добијамо $17a_1 = 51$, тј. $a_1 = 3$. $S_n = 3069 = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \dfrac{3 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}$, тј. $2^n = 1024$, $n = \log_2 1024 = 10$.

24. Чланови на непарним местима a_1, a_3, $\ldots$, a_{2k-1} и a_2, a_4, $\ldots$, a_{2k} чине две геометријске прогресије са количником q^2. Сума прве прогресије је $S_I = \dfrac{a_1 \cdot (1 - (q^2)^k)}{1 - q^2} = 85$, а сума друге је $S_{II} = \dfrac{a_1 \cdot (1 - (q^2)^k)}{1 - q^2} = 85$. Ако поделимо ове две једначине добијамо $\dfrac{S_I}{S_{II}} = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_1 \cdot q}{a_1} = q = \dfrac{170}{85} = 2$.

25. Ако једначину $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = 252$ поделимо једначином $a_2 = a_1q = 48$ добијамо $\dfrac{1 + q + q^2}{q} = \dfrac{252}{48} = \dfrac{21}{4}$, што се своди на квадратну једначину $q^2 - \dfrac{17}{4}q + 1 = 0$, чија су решења $q_1 = \dfrac{1}{4}$ (ово отпада јер је тад геометријски низ опадајући) и $q_2 = 4$. Најмањи члан је $a_1 = \dfrac{a_1q}{a_1} = \dfrac{48}{4} = 12$.

26. $a_1 + a_4 = a_1(1 + q^3) = 27$, $a_2 + a_3 = a_1q(1 + q) = 18$. Ако поделимо ове две једначине добијамо $\dfrac{1 + q^3}{q(1 + q)} = \dfrac{(1 + q)(1 - q + q^2)}{q(1 + q)} = \dfrac{1 - q + q^2}{q} = \dfrac{27}{18} = \dfrac{3}{2}$, што се своди на квадратну једначину $2q^2 - 5q + 2 = 0$, чија су решења $q' = 2$ и $q'' = \dfrac{1}{2}$. Први члан низа је $a_1 = \dfrac{27}{1 + q^3}$ што нам даје, респективно, $a_1' = 3$ и $a_1'' = 24$. Дакле постоје два низа бројева: 3, 6, 12, 24 и 24, 12, 6, 3.

27. $a_1 + a_7 = a_1 + a_1q^6 = 65$, $a_3 \cdot a_5 = a_1q^2 \cdot a_1q^4 = a_1^2q^6 = 64$. Из последње једначине имамо $a_1q^6 = \dfrac{64}{a_1}$, што кад уврстимо у прву једначину добијамо квадратну једначину ${a_1}^2 - 65a_1 + 64 = 0$ и она има два решења $a_1' - 64$ и $a_1'' = 1$. Ако је $a_1 = 64$ онда је $q^6 = 1 \;\Rightarrow\; q = \pm 1$, а ако је $a_1 = 1$ онда је $q^6 = 64 \;\Rightarrow\; q = \pm 2$, што нам даје четири низа:
1° $a_1 = 64, q = 1$ и тада је низ константан 64, 64, 64, ... (није растући);
2° $a_1 = 64, q = -1$ и тада је низ 64, -64, 64, -64, ... (опет није растући);
3° $a_1 = 1, q = -2$ и тада је низ 1, -2, 4, -8, 16, ... (опет није растући);
4° $a_1 = 1, q = 2$ и тада је низ растући 1, 2, 4, 8, 16, ..., тј. $a_n = 2^{n-1}$.

28. Из услова задатка имамо $a_3 = 2 \cdot a_2$ (јер бројеви a_1, a_2 и a_3 чине геометријску прогресију са количником $q = 2$) и $a_3 = a_2 + 6$ јер бројеви a_2, a_3 и a_4 чине аритметичку прогресију са разликом $d = 6$). Решења овог система су $a_2 = 6$, $a_3 = 12$. Такође из услова задатка имамо $a_2 = 2 \cdot a_1$, тј. $a_1 = \frac{a_2}{2} = 3$ (јер бројеви a_1, a_2 и a_3 чине геометријску прогресију са количником $q = 2$) и $a_4 = a_3 + 6 = 18$ јер бројеви a_2, a_3 и a_4 чине аритметичку прогресију са разликом $d = 6$). Тражена сума је једнака $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 39$.

29. Услови задатка су: ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3$, $2a_3 = a_2 + a_4$, $a_1 + a_4 = 35$, $a_2 + a_3 = 30$. Из треће и четврте једначине имамо $a_4 = 35 - a_1$ и $a_3 = 30 - a_2$, што кад убацимо у другу добијамо $2(30 - a_2) = a_2 + (35 - a_1)$, тј. $a_1 = 3a_2 - 25$. Када ово све заменимо у прву једначину добијамо ${a_2}^2 = (3a_2 - 25)(30 - a_2)$, тј. добили смо квадратну једначину $4{a_2}^2 - 115a_2 + 750 = 0$ која има два решења $a_2' = 10$ и $a_2'' = \dfrac{75}{4}$. a_1, a_3 и a_4 добијамо из једначина $a_1 = 3a_2 - 25$, $a_3 = 30 - a_2$ и $a_4 = 35 - a_1$. Задатак има два решења (два различита низа):
$a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 20$, $a_4 = 30$ (овај низ је растући);
$a_1 = \dfrac{125}{4}$, $a_2 = \dfrac{75}{4}$, $a_3 = \dfrac{45}{4}$, $a_4 = \dfrac{15}{4}$ (овај низ је опадајући).

30. $a_1 = 24$, ${a_5}^2 = a_1 \cdot a_1 1$, тј. $(24 + 4d)^2 = 24 \cdot (24 + 10d)$, што кад се среди даје квадратну једначину $16d^2 - 48d = 0$, чија су решења $d_1 = 0$ и $d_2 = 3$. Решење $d_1 = 0$ даје константан низ 24, 24, 24, ..., што противречи услову да је само први члан једнак 24, па је зато $d = 3$. $a_1 0 = a_1 + 9d = 24 + 9 \cdot 3 = 51$.

31. Услови задатка су: $a_1 + a_2 + a_3 = 52$, ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3$ (јер a_1, a_2 и a_3 чине геометријски низ) и $2(a_2 + 12) = (a_1 + 2) + (a_3 + 6)$ (јер $a_1 + 2$, $a_2 + 12$ и $a_3 + 6$ чине аритметички низ). Из прве једначине имамо $a_3 = 52 - a_1 - a_2$, што кад заменимо у трећу једначину добијамо $a_2 = 12$. Тада је $a_3 = 52 - a_1 - 12 = 40 - a_1$, што кад убацимо у другу једначину добијамо $144 = a_1(40 - a_1)$. Решења ове квадратне једначине, ${a_1}^2 - 40a_1 + 144 = 0$ су $a_1' = 4$ и $a_1'' = 36$, па имамо два решења задатка: 4, 12, 36 и 36, 12, 4.

32. Услови задатка су: $a_1 + a_2 + a_3 = 91$, ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3$ (јер a_1, a_2 и a_3 чине геометријски низ) и $2(a_2 + 27) = (a_1 + 25) + (a_3 + 1)$ (јер $a_1 + 25$, $a_2 + 27$ и $a_3 + 1$ чине аритметички низ). Из прве једначине имамо $a_3 = 91 - a_1 - a_2$, што кад заменимо у трећу једначину добијамо $a_2 = 21$. Тада је $a_3 = 91 - a_1 - 12 = 70 - a_1$, што кад убацимо у другу једначину добијамо $441 = a_1(70 - a_1)$. Решења ове квадратне једначине, ${a_1}^2 - 70a_1 + 441 = 0$ су $a_1' = 7$ и $a_1'' = 63$, па имамо два решења задатка: 7, 21, 63 и 63, 21, 7.

33. Услови задатка су: $2a_2 = a_1 + a_3$ (јер a_1, a_2 и a_3 чине аритметички низ), $2a_3 = a_2 + a_4$ (јер a_2, a_3 и a_4 чине аритметички низ), $(a_2 + 6)^2 = (a_1 + 5) \cdot (a_3 + 9)$ (јер $a_1 + 5$, $a_2 + 6$ и $a_3 + 9$ чине геометријски низ) и $(a_3 + 9)^2 = (a_2 + 6) \cdot (a_4 + 15)$ (јер $a_2 + 6$, $a_3 + 9$ и $a_4 + 15$ чине геометријски низ). Из прве две једначине имамо $a_1 = 2a_2 - a_3$ и $a_4 = 2a_3 - a_2$, што кад убацимо у друге две једначине добијамо ${a_2}^2 - 2a_2a_3 + {a_3}^2 - 6a_2 + 4a_3 + 9 = 0$ и ${a_2}^2 - 2a_2a_3 + {a_3}^2 - 9a_2 + 6a_3 + 9 = 0$. Када одузмемо ове две једначине добијамо $3a_2 - 2a_3 = 0$, тј. $a_3 = \frac{3}{2}a_2$. Кад ово вратимо у неку од претходне две једначине добијамо ${a_2}^2 = 36$. Ова једначина има два решења $a_2' = 6$ и $a_2'' = -6$, али у овом другом случају добили бисмо ($a_3 = \frac{3}{2}a_2$, $a_1 = 2a_2 - a_3$ и $a_4 = 2a_3 - a_2$) низ $a_1'' = -3$, $a_2'' = -6$, $a_3'' = -9$, $a_4'' = -12$, који даје низ $a_1'' + 5 = 2$, $a_2'' + 6 = 0$, $a_3'' + 9 = 0$, $a_4'' + 15 = 3$, који није геометријски! Стога је једино решење задатка низ $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$ (даје низ $a_1 + 5 = 8$, $a_2 + 6 = 12$, $a_3 + 9 = 18$, $a_4 + 15 = 27$, који је геометријски са количником $q = \frac{3}{2}$).

34. а) Услови задатка су: ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3$ (јер a_1, a_2 и a_3 чине геометријски низ), $2(a_2 + 12) = a_1 + a_3$ (јер a_1, $a_2 + 12$ и a_3 чине аритметички низ) и $(a_2 + 12)^2 = a_1 \cdot (a_3 + 96)$ (јер a_1, $a_2 + 12$ и $a_3 + 96$ чине геометријски низ). Ако прву једначину убацимо у трећу добијамо $a_2 = 4a_1 - 6$, што кад уврстимо у другу добијамо $a_3 = 12 + 7a_1$. Ако ове две једначине уврстимо у прву добијамо $(4a_1 - 6)^2 = a_1 \cdot (12 + 7a_1)$, тј. $9({a_1}^2 - 60a_1 + 36) = 0$. Ова квадратна једначина има два решења $a_1' = 6$ и $a_1'' = \dfrac{2}{3}$, те задатак има два решења: $a_1 = 6$, $a_2 = 18$, $a_3 = 54$ и $a_1 = \dfrac{2}{3}$, $a_2 = -\dfrac{10}{3}$, $a_3 = \dfrac{50}{3}$.
б) Потпуно аналогно је ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3$), $2(a_2 + 8) = a_1 + a_3$ и $(a_2 + 8)^2 = a_1 \cdot (a_3 + 64)$. $a_2 = 4a_1 - 4$, $a_3 = 8 + 7a_1$. Квадратна једначина $9{a_1}^2 - 40a_1 + 16 = 0$ има два решења $a_1' = 4$ и $a_1'' = \dfrac{4}{9}$, те задатак има два решења: $a_1 = 4$, $a_2 = 12$, $a_3 = 36$ и $a_1 = \dfrac{4}{9}$, $a_2 = -\dfrac{20}{9}$, $a_3 = \dfrac{100}{9}$.

35. $a_3 + a_7 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 46$, тј. $a_1 + 4d = 23$. $a_2 : a_6 = 2 : 7$, тј. $(a_1 + d) : (a_1 + 5d) = 2 : 7$, што кад се ослободимо пропорције даје $7(a_1 + d) = 2(a_1 + 5d)$, тј. $3d = 5a_1$. Решавањем овог система по a_1 и d добијамо $a_1 = 3$, $d = 5$. Сума $S_n = n \cdot 3 + \dfrac{(n-1)n}{2} \cdot 5 = 1575$ даје кдвадратну једначину $5n^2 + n - 3150 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $n_1 = -\dfrac{126}{5}$ и $n_2 = 25$, али како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење

$n_1 = -\dfrac{126}{5}$ отпада, тј. потребно је сабрати $n = 25$ чланова низа да би се добила сума 1575.

36. Из пропорције $(a_1 + a_4) : (a_2 + a_3) = 3 : 2$, тј. $a_1(1 + q^3) : a_1q(1 + q) = 3 : 2$ добијамо $2(1 + q^3) = 3q(1 + q)$. Како је $1 + q^3 = (1 + q)(1 - q + q^2)$ можемо обе стране поделити са $1 + q$ ($1 + q \neq 0$ јер ако би било $q = -1$ онда би било $a_4 = a_2 \cdot q^2 = a_2$, што је у контрадикцији са условом задатка $a_2 = a_4 - 72$) и онда се добија квадратна једначина $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Њена решења су $q_1 = 2$ и $q_2 = \frac{1}{2}$, али како је $a_2 = a_4 - 72$, тј. $a_2 < a_4$ решење $q_2 = \frac{1}{2}$ отпада, па је $q = 2$. Ако то заменимо у $a_2 = a_4 - 72$, $2a_1 = 8a_1 - 72$ добијамо $a_1 = 12$, $a_2 = 24$, $a_3 = 48$ и $a_4 = 96$.

37. **а)** $a_k = f(x+k) - f(x+k-1) = ((x+k)^2 - 3(x+k)+2) - ((x+k-1)^2 - 3(x+k-1)+2) = 2x+2k-4 = (2x-2)+(k-1)\cdot 2$, што значи да бројеви $a_1 = f(x+1) - f(x)$, $a_2 = f(x+2) - f(x+1)$, ... чине аритметичку прогресију са првим чланом $a_1 = 2x - 2$ и разликом $d = 2$. **б)** $S_5 = 5a_1 + \dfrac{4 \cdot 5}{2} \cdot d = 10x + 10 = 60 \;\Rightarrow x = 5$. **в)** Како је $x = 5$ имамо да је $a_1 = 2x - 2 = 8$. Потребно је да нађемо најмање позитивно цело решење квадратне неједначине $S_n = 8 \cdot n + \dfrac{(n-1)n}{2} \cdot 2 = n^2 + 7n > 120$, тј. $n^2 + 7n - 120 > 0$ (решење ове неједначине је $n \in (-\infty, -15) \cup (8, +\infty)$ јер је коефицијент уз n^2 $a = 1 > 0$, дискриминанта $D = 529 > 0$, стога имамо решења квадратне једначине $n^2 + 7n - 120 = 0$: $n_1 = -15$ и $n_2 = 8$), те је потребно најмање $n = 9$ сабирака да би збир био већи од 120 ($S_8 = 120$, $S_9 = 144$).

38. $1 + 2 + \ldots + n = \overline{xxx} = x \cdot 111 = x \cdot 3 \cdot 37$, где је x цифра, тј. $x \in \{1, 2 \ldots, 9\}$ (x не може бити 0, јер би тада тражени троцифрен број био једнак нули). Бројеви $1, 2 \ldots, n$ чине аритметичку прогресију са првим чланом $a_1 = 1$ и разликом $d = 1$, те је $S_n = n \cdot 1 + \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Како је $x \in \{1, 2 \ldots, 9\}$ имамо да је $3x \in \{3, 6 \ldots, 27\}$, тј. $3x < 37$ па мора бити $n = 37$ и $\dfrac{n+1}{2} = 3x$ или $n + 1 = 37$ и $\dfrac{n}{2} = 3x$. Први случај је немогућ јер би онда цифра x била једнака $\dfrac{38}{6}$, те је $n + 1 = 37$, тј. $n = 36$ (Тада је $x = 6$, тј. $S_{36} = 666$).

39. Нека је тражени број $\overline{abc}$, $a, b, c \in \{0, 1, 2 \ldots, 9\}, a \neq 0$. Из услова $\overline{abc} + 198 = \overline{cba}$, добијамо $100a + 10b + c + 198 = 100c + 10b + a$, тј. $99(c - a) = 198$, $c - a = 2$, $c = a + 2$. Како цифре a, b и c чине аритметички низ имамо да је $c = a + 2d \;\Rightarrow\; d = 1$, тј. цифре a, b и c су узастопне. Када то убацимо у трећи услов $\overline{abc} : (a + b + c) = 26$ добијамо $(100a + 10(a+1) + (a+2) = 26 \cdot (a + (a+1) + (a+2))$, одакле добијамо $a = 2$, тј. тражени број је 234.

40. Посматрајмо низ са 9 пута већим члановима: 9, 99, 999, ... То је низ $10^1 - 1$, $10^2 - 1$, $10^3 - 1$, ... ($b_n = 10^n - 1$). Његова сума је $\sigma_n = 10^1 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \ldots + 10^n - 1 = 10^1 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - n = 10 \cdot \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} - n = \dfrac{10}{9}(10^n - 1) - n$. Стога је сума траженог низа $a_n = \dfrac{b_n}{9}$ једнака $S_n = \dfrac{\sigma_n}{9} = \dfrac{1}{81}(10^{n+1} - 10 - 9n)$.

41. $5^{2+4+6+\ldots+2n} = 0.04^{-21} = (\dfrac{1}{25})^{-21} = (5^{-2})^{-21} = 5^{42}$. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 42$. Ово је сума n чланова аритметичког низа код кога је први члан $a_1 = 2$ и разлика $d = 2$ (а $a_n = 2 + (n-1)2 = 2n$), тј. $S_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \dfrac{n}{2} \cdot (2 + 2n) = n(n+1) = 42$. Решења ове квадратне једначине су $n_1 = -7$ и $n_2 = 6$, али како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење $n_1 = -7$ отпада, тј. решење полазне једначине је $n = 6$.

42. $\log 2 + \log(2^x + 3) = 2\log(2^x - 1)$ јер они чине аритметички низ. Када се ослободимо логаритма из $\log 2 \cdot (2^x + 3) = \log(2^x - 1)^2$ (сви логаритми су дефинисани за $x > 0$) добија се $2 \cdot (2^x + 3) = (2^x - 1)^2$. Сменом $2^x = t$, ова једначина постаје $2(t + 3) = t^2 - 2t + 1$, односно $t^2 - 4t - 5 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $t_1 = -1$ и $t_2 = 5$, али како је $t = 2^x > 0$ решење $t_1 = -1$ отпада, тј. решење је $t = 2^x = 5$, односно $x = \log_2 5$ (задовољава $x > 0$).

44. Услови задатка су: ${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3$ (јер чине геометријски низ), $a_1 + a_2 + a_3 = 14$ и $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 = \log_2 a_1a_2a_3 = 6$. Из треће једначине имамо $a_1a_2a_3 = 2^6 = 64$ и кад то убацимо прву једначину добијамо ${a_2}^3 = 2^6$, тј. $a_2 = 2^2 = 4$. Како бројеви a_1, a_2 и a_3 чине геометријски низ имамо да је $a_1 = \dfrac{a_2}{q} = \dfrac{4}{q}$ и $a_3 = a_2q = 4q$. Кад то убацимо у другу једначину добијамо $\dfrac{4}{q} + 4 + 4q = 14$, што се своди на квадратну једначину $2q^2 - 5q + 2 = 0$, која има два решења $q_1 = 2$ и $q_2 = \dfrac{1}{2}$. Стога овај задатак има два низа као решење: 2, 4, 8 и 8, 4, 2.

45. Решење 1: Услови задатка су: $S_n = 316$, $a_n = 88$, $d = 6$. $a_n = a_1 + (n-1)d$, што нам даје $a_1 = a_n - (n-1)d = 94 - 6n$. $S_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \dfrac{n}{2}(94 - 6n + 88) = 91n - 3n^2 = 316$. Решења ове квадратне једначине су $n_1 = \dfrac{79}{3}$ и

$n_2 = 4$, али како број чланова низа мора бити позитиван цео број решење $n_1 = \dfrac{79}{3}$ отпада, значи број страница многоугла је $n = 4$, тј. то је четвороугао са страницама 70, 76, 82, 88.
Решење 2: – метод пробе. Највећи члан је 88, а онај пре њега је $88 - 6 = 82$. $88 + 82 = 170 < 316$. Следећи члан је $82 - 6 = 76$. $88 + 82 + 76 = 246 < 316$. Следећи члан је $76 - 6 = 70$. $88 + 82 + 76 + 70 = 316$. Значи то је четвороугао.

46. Странице троугла имају дужине a, $a + 4$ и $a + 8$. Угао од 120° је туп и наспрам њега се налази највећа страница у троуглу, $a+8$. Из косинусне теореме за тај туп угао имамо $(a+8)^2 = a^2+(a+4)^2-2\cdot a\cdot(a+4)\cdot\cos(120^\circ)$, тј. $a^2 + 16a + 64 = a^2 + a^2 + 8a + 16 + 2(a^2 + 4a)(-\frac{1}{2})$, што нам даје квадратну једначину $a^2 - 2a - 24 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $a_1 = -4$ и $a_2 = 6$, али како дужина странице мора бити позитиван број решење $a_1 = -4$ отпада, тј. $a = 6$. Странице троугла су 6, 10 и 14, а његова површина је $P = \frac{1}{2}6 \cdot 10 \cdot \sin(120^\circ) = 15\sqrt{3}$.

86. Да би сви логаритми били дефинисани мора $x \in (0, 1)$, па решење $3^x = 4$ отпада и остаје само $3^x = 3/2$, тј. $x = 1 - \log_3 2$.

91. $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2R}\left(\dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right) = \dfrac{1}{2R} \cdot \dfrac{2\cancel{\sin\frac{3\pi}{7}} \cdot \cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7} \cdot \cancel{\sin\frac{4\pi}{7}}} = \dfrac{1}{2R} \cdot \dfrac{2\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7} \cdot \cos\frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{2R\sin\frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{a}$.

92. $a_k = P + N! + k \cdot n!$, $0 \leqslant k < n$, где је P прост број већи од n, а $N = P + (n - 1) \cdot n!$